TENTAMEN ALGEBRA, 24 MAART 2003, 14:00–17:00

Schrijf op ieder vel papier je naam, en op het eerste blad bovendien het aantal ingeleverde blaadjes!

De negen onderstaande opgaven tellen allemaal even zwaar.

(1) Je mag in deze opgave zonder verder bewijs gebruiken, dat er een homomorfisme φ bestaat van de optelgroep $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ naar de vermenigvuldiggroep $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$, met de eigenschap $\varphi(1 \bmod 6) = 2 \bmod 9$.

Bepaal van elk element uit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ het beeld onder φ.

(2) De inverteerbare twee bij twee matrices met coëfficiënten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vormen een groep (met matrixvermenigvuldiging als bewerking) die $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ heet. Gebruik de werking van deze matrices op de drie vectoren $\binom{\bar{1}}{\bar{0}}\binom{\bar{0}}{\bar{1}}$ en $\binom{\bar{1}}{\bar{1}}$ om aan te tonen dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ isomorf is met S_3.

(3) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ is per definitie de vermenigvuldiggroep bestaande uit alle inverteerbare 2×2 matrices met reële coëfficiënten. Laat $v \neq \binom{0}{0}$ een willekeurige vector in $\mathbb{R}^2$ zijn. Bewijs dat $H := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\ ;\ v \text{ is een eigenvector van } A\}$ een ondergroep is van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(4) Toon aan dat de ondergroep H uit de vorige opgave geen normaaldeler is in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Daarvoor is het handig om te gebruiken dat als v_1 en v_2 eigenvectoren zijn van een matrix A, dan zijn Bv_1 en Bv_2 eigenvectoren van BAB^{-1}.

(5) Bepaal alle normaaldelers in de groep D_4 (dit is een groep bestaande uit 8 elementen).

(6) Neem $n \geq 5$ en laat G een commutatieve groep zijn. Toon aan dat het enige homomorfisme $\phi : A_n \to G$ de afbeelding is die elk element van A_n naar $e \in G$ stuurt.

(7) Schrijf σ^3 als product van disjuncte cykels, voor $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9)$.

(8) Geef een voorbeeld van een Sylow 3-groep in A_9 (oftewel, geef een ondergroep bestaande uit 81 elementen).

(9) Onder welke voorwaarden op $n, m > 1$ definieert $\bar{a} \mapsto 2^a \bmod m$ een homomorfisme: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$?